FONCTIONS USUELLES

PLAN

I : Fonctions exponentielles

1– Exponentielles et logarithmes

❑ $\ln(x)$ est la primitive de $\dfrac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ et s'annulant en $x = 1$. Autrement dit :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Sa dérivée $\dfrac{1}{x}$ étant strictement positive, ln est donc strictement croissante. La dérivée de $\ln(ax)$ valant $\dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$, $\ln(ax)$ est égal à $\ln(x)$ + Cte. La valeur de Cte est obtenue en prenant $x = 1$, ce qui donne la relation célèbre :

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$$

Cette relation, transformant produit en somme, a permis, depuis le XVIIème et jusqu'à l'introduction des calculatrices à bas prix vers 1980, d'accélérer notablement les possibilités de calcul des mathématiciens. Ainsi Laplace s'émerveille-t-il "*des logarithmes, admirable instrument, qui, en réduisant à quelques heures le travail de plusieurs mois, double si l'on peut dire la vie des astronomes, et leur épargne les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs*". En prenant $a = \dfrac{1}{x}$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

Etant strictement croissante, ou bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = l$ limite finie. Comme, pour n entier, $\ln(2^n) = n\ln(2)$ (récurrence facile) et que cette quantité tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, la seule conclusion possible est :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Et donc, en considérant $\dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

ln réalise donc une bijection de]0, +∞[sur]–∞, +∞[. Sa réciproque est l'exponentielle :

$$t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$$

Le nombre e est tel que $1 = \ln(e)$ soit $\int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$. e vaut environ 2,71828...

Les limites relatives à ln se traduisent pour l'exponentielle de la façon suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

La règle de dérivation d'une fonction réciproque (cf le chapitre *Dérivation* dans le fichier DERIVEE.PDF) conduit à :

$$(e^x)' = e^x$$

On a également $e^{x+y} = e^x e^y$ puisqu'en prenant les logarithmes des deux membres, on obtient d'une part :

$$\ln(e^{x+y}) = x + y$$

et d'autre part :

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y$$

❑ Pour tout a strictement positif et b, on posera $a^b = e^{\ln(a)b}$. Cette définition est compatible avec le calcul des puissances de a, puisque, pour n entier, on a :

$$\begin{aligned} e^{\ln(a)n} &= e^{\ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a)} \text{ avec } n \text{ exposant } \ln(a) \\ &= e^{\ln(a)} \times e^{\ln(a)} \times \ldots \times e^{\ln(a)} \\ &= a \times a \times \ldots \times a \\ &= a^n \end{aligned}$$

On a alors $\ln(a^b) = b \ln(a)$, et également $(e^x)^y = e^{xy}$ obtenu en prenant $a = e^x$ et $b = y$ dans la formule donnant a^b. On a enfin, pour $a > 0$ et différent de 1 :

$$x = a^t \Leftrightarrow x = e^{\ln(a)t} \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(a)t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

a^t est l'exponentielle de t en base a et $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ est le logarithme de x en base a. Le logarithme le plus utilisé en dehors du logarithme en base e (dit népérien) est le logarithme décimal, pour lequel $a = 10$, et que l'on note souvent $\log_{10}$, voire même log. On rencontre aussi en informatique le logarithme en base 2.

Si u est une fonction strictement positive, et v une fonction quelconque, on a :

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

La deuxième forme peut servir à dériver la fonction ou à en calculer les limites.

❑ Un certain nombre de limites usuelles doivent être connues :

(i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et plus généralement $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$ pour tout $a > 0$

(ii) $\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ et plus généralement $\lim_{x \to 0} x^a\ln(x) = 0$

(iii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et plus généralement $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$ pour tout $a > 0$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et plus généralement $\lim_{x \to -\infty} x^a e^x = 0$ pour tout $a > 0$

Montrons (i). Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. f admet pour dérivée $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ qui est négative pour $x > e$, donc f est décroissante strictement positive sur $[e, +\infty[$. Elle admet donc une limite l positive ou nulle en $+\infty$. Cette limite est aussi celle de $\frac{\ln(y)}{y}$ avec $y = x^2$, soit :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = l$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x)}{x^2} = l$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} 2 \times \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x} = l$$

$$\Rightarrow \quad 2 \times l \times 0 = l$$

$$\Rightarrow \quad l = 0$$

Toutes les autres limites s'en déduisent. En remplaçant x par x^a, on obtient :

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^a)}{x^a} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a\ln(x)}{x^a} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

(ii) En changeant dans (i) x en $1/x$ avec x tendant vers 0, on obtient :

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1/x)}{1/x} = \lim_{x \to 0} -x\ln(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$$

En remplaçant x par x^a, on obtient $\lim_{x \to 0} x^a \ln(x) = 0$

(iii) En changeant dans (i) x par e^x, on obtient $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ou $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. En élevant à la puissance a, on obtient $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^a} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{a^a x^a} = +\infty$ en divisant par a^a et enfin, en remplaçant ax par x, on obtient bien $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$.

(iv) Remplacer x par $-x$ dans (iii).

2– Fonctions trigonométriques hyperboliques

a) sh(x) et ch(x) :

On pose :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad\qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(sinus hyperbolique) (cosinus hyperbolique)

On vérifie facilement que :

$e^x = \mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)$

sh est impair.

ch est pair et strictement positif.

(sh et ch sont respectivement la partie paire et impaire de l'exponentielle)

sh' = ch donc sh est strictement croissante, et du signe de x.

ch' = sh donc ch est décroissant sur $]-\infty,0]$ et croissant sur $[0,+\infty[$.

$\text{sh}(x) \sim \text{ch}(x) \sim \dfrac{e^x}{2}$ au voisinage de $+\infty$.

(La notation $\sim$ est définie dans le chapitre *Limites et Continuité* qu'on trouvera dans le fichier LIMITES.PDF. $f \sim g$ au voisinage de x_0 signifie que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$)

$\text{sh}(x) \sim x$ au voisinage de 0 (car sh'(0) = 1).

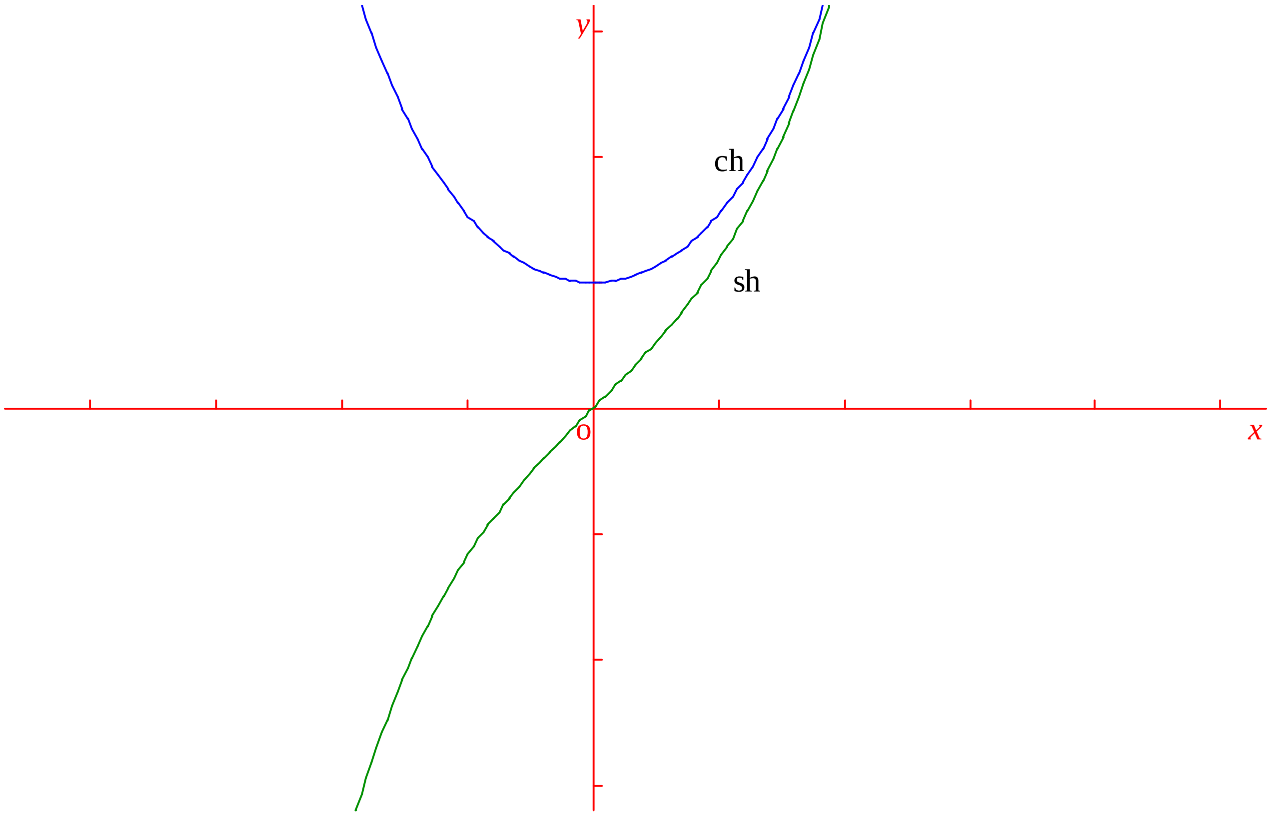
$\text{ch}(x) \sim 1$ au voisinage de 0.

$\text{ch}(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$ car on vérifiera que $\text{ch}(x) - 1 = 2\,\text{sh}^2(\dfrac{x}{2})$

Il existe des formules de trigonométries hyperboliques, en particulier :

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

On consultera sur ce point l'annexe, donnant une comparaison des formules de trigonométries circulaires et hyperboliques.



sh étant continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une réciproque qu'on peut calculer explicitement :

$$x = \text{sh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad e^{2y} - 2e^y x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$

La seule racine positive est $x + \sqrt{x^2 + 1}$. On a donc :

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

On vérifiera que sa dérivée vaut $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. En calcul intégral, on pourra donc utiliser comme primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ la fonction $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

De même, ch étant continue strictement monotone de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, elle admet une réciproque :

$$x = \text{ch}y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \text{ et } y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2y} - 2e^y x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

Les deux racines sont positives, mais la seule racine supérieure ou égale à 1 est $x + \sqrt{x^2-1}$. On a donc :

$$y = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

En fait, il peut être parfois utile d'étendre cette fonction à l'intervalle $]-\infty,-1]$ en considérant $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$, dont on vérifiera en exercice qu'elle est impaire. Sa dérivée vaut $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Ainsi, en calcul intégral, on pourra utiliser comme primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ la fonction $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$.

<u>b) th(x)</u> :

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad \text{(tangente hyperbolique)}$$

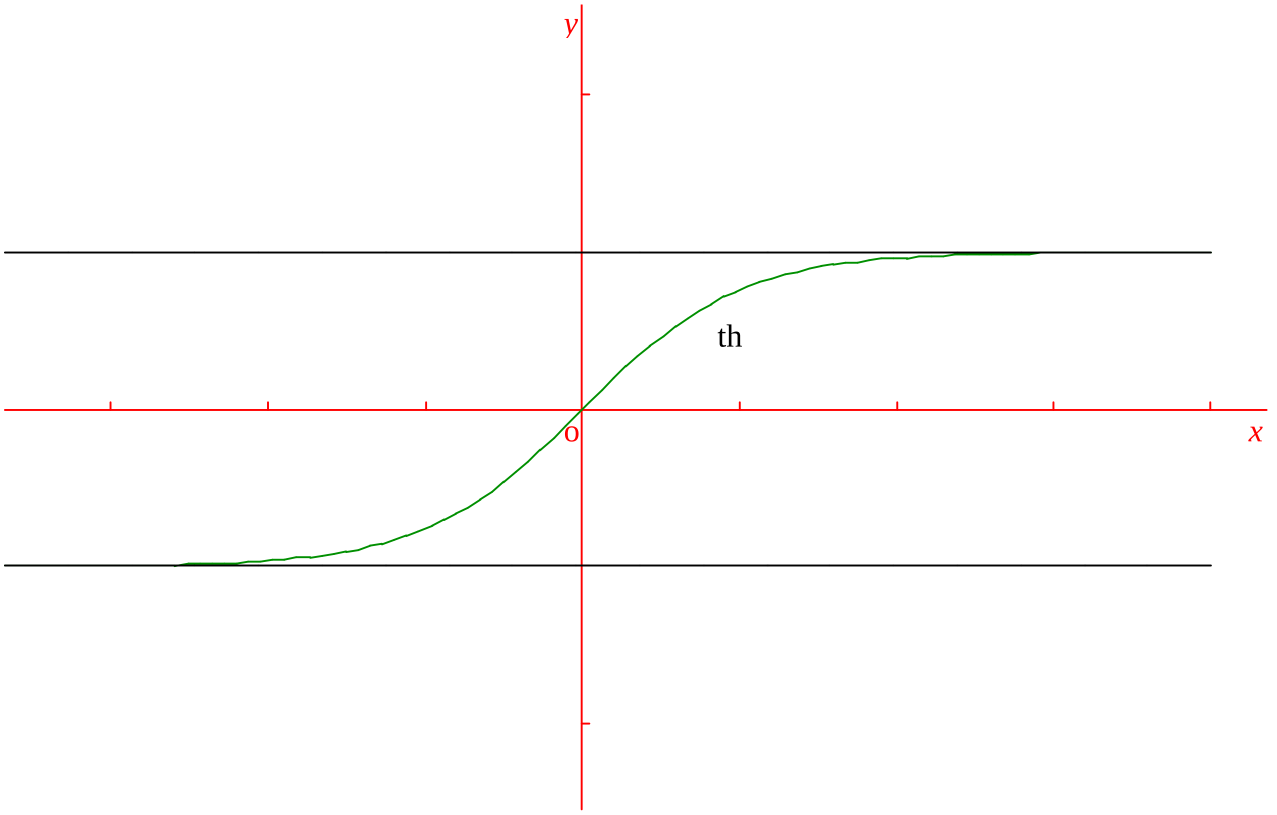
On a :

th est impaire.

$\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x) > 0$ donc th est strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$

$\text{th}(x) \sim x$ au voisinage de 0 (car $\text{th}'(0) = 1$).



th est continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur]–1,1[. Elle admet donc une réciproque :

$$x = \text{th}(y) = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad e^{2y} = \frac{x+1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \qquad y = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}.$$

Il est parfois utile d'étendre cette fonction à $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ en considérant $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$. Sa dérivée vaut $\frac{1}{1-x^2}$.

II : Fonctions circulaires

1– fonctions trigonométriques

J'ose espérer qu'aucun lecteur n'ignore ce que sont les fonctions sinus, cosinus et tangente. Il convient d'apprendre les formules trigonométriques situées en fin de ce chapitre ☺.

2– Réciproque des fonctions trigonométriques

a) arcsin :

sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est continue strictement monotone. Elle admet donc une réciproque notée arcsin. On a donc :

$$\theta = \arcsin(x) \Leftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } x = \sin(\theta)$$

(On fera un rapprochement dans la formulation avec l'équivalence :

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y \geq 0 \text{ et } x = y^2)$$

Voici un tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sin\theta$
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	θ

arcsin est strictement croissante, impaire :

❑ $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

❑ $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$

❑ $\forall \theta \in [-\pi/2,\pi/2]$, $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$

MAIS cette dernière relation est fausse si θ appartient à un autre intervalle.

EXEMPLE : $\arcsin(\sin(3\pi/4)) = \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

(On fera un rapprochement dans la formulation des relations précédentes avec :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $(\sqrt{x})^2 = x$

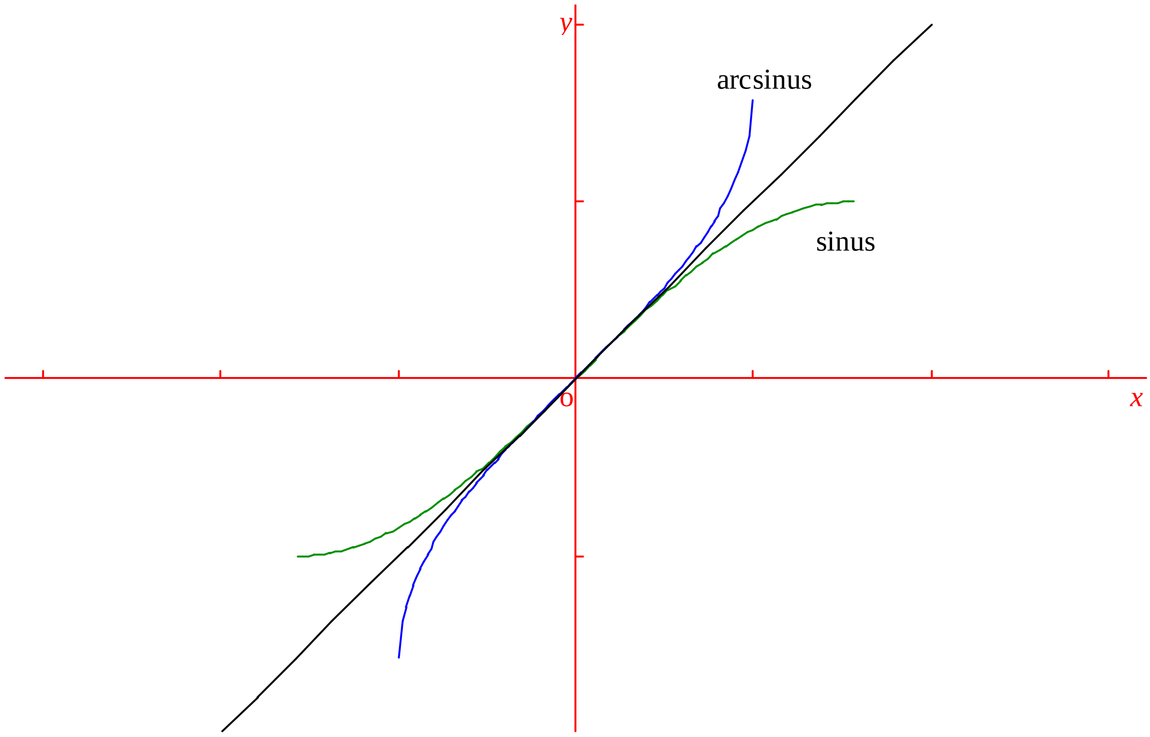
$\forall y \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{y^2} = y$

MAIS pour y quelconque dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{y^2} = |y|$

❑ $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

car cos est positif sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et dans ce cas, $\cos(\theta) = \sqrt{1-\sin^2(\theta)}$

La dérivée d'arcsin(x) est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (voir le chapitre *Dérivation* dans le fichier DERIVEE.PDF pour savoir comment dériver la réciproque d'une fonction).



b) <u>arccos</u> :

cos : $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est continue strictement monotone. Elle admet donc une réciproque notée arccos. On a donc :

$$\theta = \arccos(x) \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \text{ et } x = \cos(\theta)$$

Voici un tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos\theta$
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	θ

arccos est strictement décroissante :

❑ $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

En effet, $\theta = \arccos(-x) \Leftrightarrow -x = \cos(\theta)$ et $\theta \in [0, \pi]$

$\Leftrightarrow x = -\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta)$ et $\pi-\theta \in [0, \pi]$

$\Leftrightarrow \pi - \theta = \arccos(x)$

❑ $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$

❑ $\forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos\theta) = \theta$

MAIS cette dernière relation est fausse si θ appartient à un autre intervalle.

EXEMPLE : $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{4})) = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

❑ $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

car sin est positif sur $[0, \pi]$, et dans ce cas, $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$

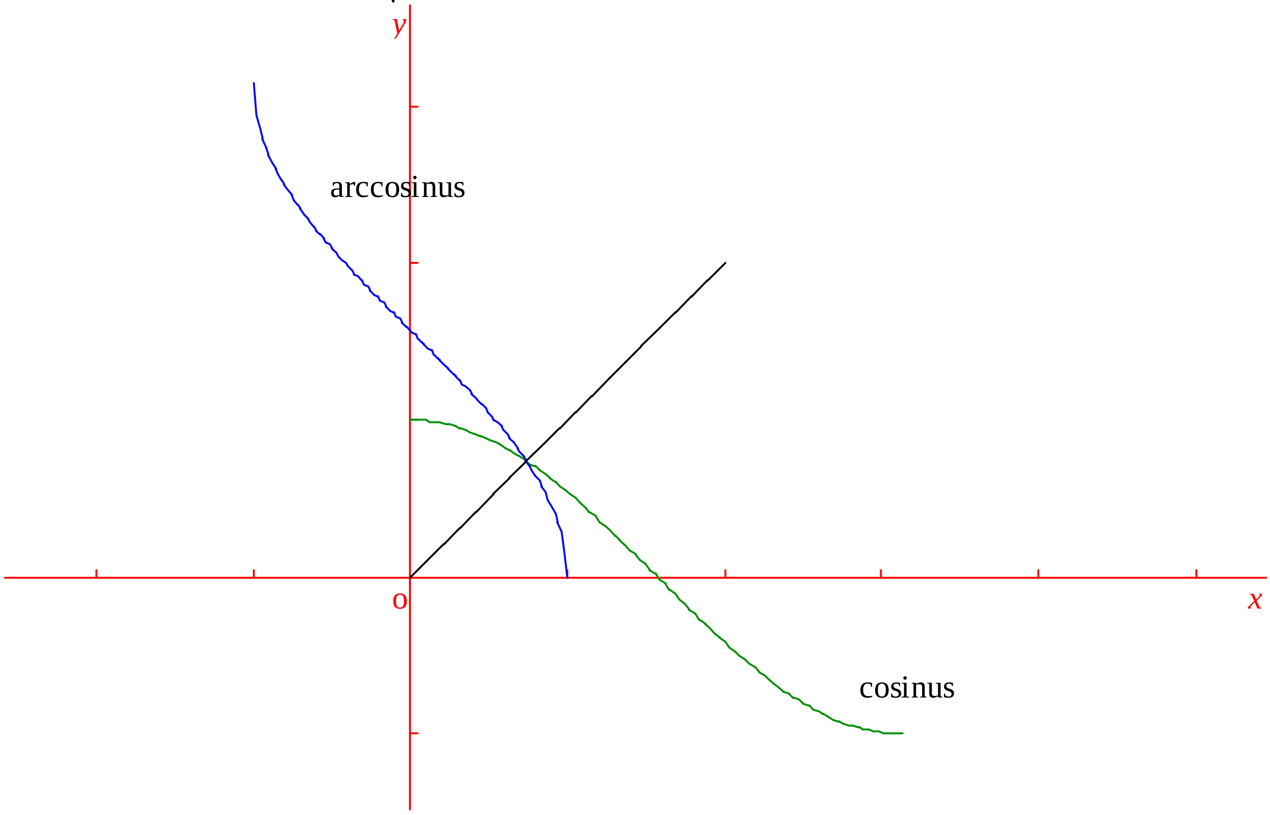
❑ $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

En effet, $\theta = \arcsin(x) \Leftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin(\theta) = x$

$$\Leftrightarrow \; x = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ et } \frac{\pi}{2} - \theta \in [0,\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \arccos(x)$$

La dérivée de $\arccos(x)$ est $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



c) arctan :

tan : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone. Elle admet donc une réciproque notée arctan.

On a donc :

$$\theta = \arctan(x) \Leftrightarrow \theta \in \;]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } x = \tan(\theta)$$

Voici un tableau de valeurs :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\tan\theta$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	θ

arctan est strictement croissante, impaire :

❑ $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
❑ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$
❑ $\forall\, \theta \in\ ]-\pi/2,\pi/2[$, $\arctan(\tan(\theta)) = \theta$
MAIS cette dernière relation est fausse si θ appartient à un autre intervalle.

Exemple : $\arctan[\tan(3\pi/4)] = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

❑ $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
car cos est positif sur $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, et dans ce cas, $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$
❑ $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

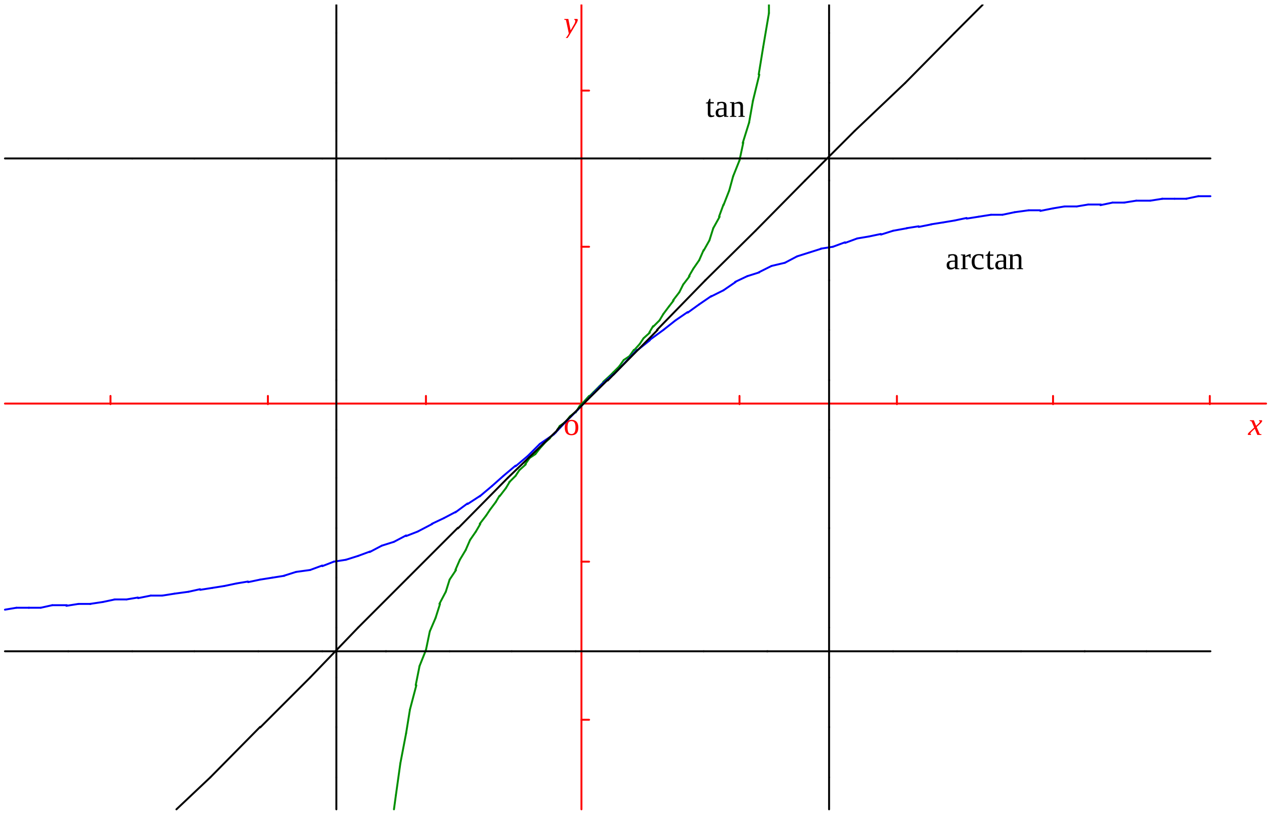
❑ $\arctan(x) + \arctan(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x)$ où $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$
$= -1$ si $x < 0$
Les deux membres étant des fonctions impaires de x, il suffit de le montrer pour $x > 0$. Dans ce cas, on a :

$$\theta = \arctan(\frac{1}{x}) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \tan(\theta) \text{ et } \theta \in\ ]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan(\theta)} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ et } \frac{\pi}{2} - \theta \in\ ]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \arctan(x)$$

La dérivée d'arctan(x) est $\dfrac{1}{1 + x^2}$.


y
tan
arctan
o
x

Annexe : trigonométrie

$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$	$\text{ch}(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\text{sh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$
$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$

FORMULES

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\,\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\,\text{sh}(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$	$\text{ch}(a-b) = \text{ch}(a)\,\text{ch}(b) - \text{sh}(a)\,\text{sh}(b)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$	$\text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)$
$\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$	$\text{ch}^2(x) = \dfrac{1 + \text{ch}(2x)}{2}$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$	$\text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\,\text{ch}(b) + \text{ch}(a)\,\text{sh}(b)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$	$\text{sh}(a-b) = \text{sh}(a)\,\text{ch}(b) - \text{ch}(a)\,\text{sh}(b)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$	$\text{sh}(2x) = 2\,\text{sh}(x)\,\text{ch}(x)$
$\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$	$\text{sh}^2(x) = \dfrac{\text{ch}(2x) - 1}{2}$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$	$\text{th}(a+b) = \dfrac{\text{th}(a) + \text{th}(b)}{1 + \text{th}(a)\,\text{th}(b)}$
$\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$	$\text{th}(a-b) = \dfrac{\text{th}(a) - \text{th}(b)}{1 - \text{th}(a)\,\text{th}(b)}$
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$	$\text{th}(2x) = \dfrac{2\,\text{th}(x)}{1 + \text{th}^2(x)}$
$\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$	$\text{ch}(a)\,\text{ch}(b) = \dfrac{1}{2}[\text{ch}(a+b) + \text{ch}(a-b)]$
$\sin(a)\sin(b) = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$	$\text{sh}(a)\,\text{sh}(b) = \dfrac{1}{2}[\text{ch}(a+b) - \text{ch}(a-b)]$
$\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$	$\text{sh}(a)\,\text{ch}(b) = \dfrac{1}{2}[\text{sh}(a+b) + \text{sh}(a-b)]$
$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	$\text{ch}(p) + \text{ch}(q) = 2\,\text{ch}\dfrac{p+q}{2}\,\text{ch}\dfrac{p-q}{2}$
$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$	$\text{ch}(p) - \text{ch}(q) = 2\,\text{sh}\dfrac{p+q}{2}\,\text{sh}\dfrac{p-q}{2}$
$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	$\text{sh}(p) + \text{sh}(q) = 2\,\text{sh}\dfrac{p+q}{2}\,\text{ch}\dfrac{p-q}{2}$
pour $t = \tan(\frac{x}{2})$	pour $t = \text{th}(\frac{x}{2})$
$\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$	$\text{sh}(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$
$\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\text{ch}(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$
$\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$	$\text{th}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

DERIVEES

$\cos'(x) = -\sin(x)$ $\sin'(x) = \cos(x)$ $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$

PARAMETRAGES

paramétrage de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $x = a\cos(t) \quad y = b\sin(t)$	paramétrage de l'hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $x = a\,\mathrm{ch}(t) \quad y = b\,\mathrm{sh}(t)$

EQUIVALENTS au voisinage de 0

$\sin(x) \sim x$ $\cos(x) \sim 1$ $\tan(x) \sim x$ $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$	$\mathrm{sh}(x) \sim x$ $\mathrm{ch}(x) \sim 1$ $\mathrm{th}(x) \sim x$ $\mathrm{ch}(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$

DEVELOPPEMENTS LIMITES au voisinage de 0

$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$ $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$ $\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$

◆